Le théorème de Polya.

Leçons : 101, 104, 190.

Je me suis passée de référence (i.e. je l'ai appris par coeur) mais si on le trouve on peut avoir Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen de Polya comme référence, ou sa traduction anglaise par Read (parue chez Springer) Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs and Chemical Compounds. Je suis tombée sur ce théorème ici : http ://culturemath.ens.fr/maths/pdf/combi/polya.pdf.

Le théorème à prouver est le suivant :

Théorème 1 (*Polya*)

$W = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G}\prod_{i=1}^{|X|}(X_1^i + \cdots + X_q^i)^{e_i(\sigma)}$ où $e_i(\sigma)$ est le nombre d'orbites de X sous l'action de $< \sigma >$ de cardinal i.

Ce qui suit va expliquer pourquoi ce théorème est très important (et devrait figurer dans votre plan).

À noter que la démonstration de ce théorème est assez rapide. Pour faire quelque chose qui tient en 12-15 min il faut soit rajouter des choses à démontrer (le théorème de Burnside par exemple, comme il est rapide à démontrer et qu'on l'utilise dans la preuve) soit appliquer le théorème à un exemple (c'est ce que j'ai fait). Comme ce théorème n'est pas très connu, ça peut être bien de l'appliquer à un exemple pour que le jury comprenne mieux ce qui se passe (et ça montre que vous êtes pédagogue). Je vous conseille de choisir vous-même votre exemple plutôt que le mien, parce que maintenant que ce développement est sur Internet plusieurs personnes vont le faire en développement, et si tout le monde a le même exemple ça peut agacer le jury. Allez-y en tâtonnant, et prenez quelque chose que vous visualisez bien (j'avais pris les coloriages des arêtes d'un polygone régulier parce que je le visualisais bien, et j'ai choisi un hexagone régulier pour que l'exemple ne soit pas trivial mais ne soit pas trop dur à calculer non plus).

Théorème 2 (*Burnside*)

Le nombre d'orbites de l'ensemble fini X sous l'action du groupe fini G est égal à $\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g\in G}|X^{<g>}|$ (où $X^{<g>}=\{x\in X, g.x=x\}$).

Définition 3

Un coloriage de l'ensemble X avec (au plus) $q\in\mathbb{N}^*$ couleurs est une application de X dans $\{1,\dots,q\}$. Un coloriage f est de type $(n_1,\dots,n_q)\in\{0,\dots,|X|\}^q$ si pour tout $i\in\{1,\dots,q\}|f^{-1}(\{i\})|=n_i$ (et on a donc $n_1+\cdots+n_q=|X|$).

Notation 4

Si α est un type de coloriage alors $\mathcal{C}_\alpha$ est l'ensemble des coloriages de type α et $\mathcal{O}_\alpha$ est l'ensemble des orbites de $\mathcal{C}_\alpha$ sous l'action du groupe G induite par l'action de G sur X ($\sigma.f : x\mapsto f(\sigma.x)$).

Remarque 5

Le type est un invariant pour cette action.

Théorème 6

Le théorème de Burnside donne $|\mathcal{O}_\alpha|=\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{\sigma\in G}|\mathcal{C}_\alpha^{<\sigma>}|$.

Application 7

Il y a onze coloriages de type $(2,2,2)$ des arêtes d'un hexagone régulier H à isométrie de H près.

Définition 8

Posons $w:\begin{cases}\{1,\dots,q\} & \to & \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_q]\\ i & \mapsto & X_i\end{cases}$. Soit f un coloriage de X. Le poids de f est $W(f)=\displaystyle\prod_{x\in X}w(f(x))$.

Remarque 9

Si f est de type $(n_1,\dots,n_q)$ alors $W(f)=X_1^{n_1}\dots X_q^{n_q}$. Le poids est donc un invariant pour l'action de G sur les coloriages.

Définition 10

Soit $\{f_1, \ldots, f_r\}$ un système de représentants des orbites de l'action de G sur les coloriages. L'inventaire (ou polynôme de Polya) est $W = \sum_{i=1}^{r} W(f_i) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_q]$.

Proposition 11

i) Pour tout type $(n_1, \ldots, n_q)$ le coefficient devant $X_1^{n_1} \ldots X_q^{n_q}$ dans W est égal à $|\mathcal{O}_{(n_1,\ldots,n_q)}|$.
ii) $W(1, \ldots, 1)$ est égal au nombre d'orbites de l'ensemble des coloriages.

Théorème 12 (*Polya*)

$W = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \prod_{i=1}^{|X|} (X_1^i + \cdots + X_q^i)^{e_i(\sigma)}$ où $e_i(\sigma)$ est le nombre d'orbites de X sous l'action de $< \sigma >$ de cardinal i.

Application 13

En développant $\frac{1}{12}((X_1 + X_2 + X_3)^6 + 2(X_1^6 + X_2^6 + X_3^6) + 2(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3)^2 + 4(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^3 + 3(X_1 + X_2 + X_3)^2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^2)$ on a tous les nombres de coloriages de type donné des arêtes d'un hexagone régulier H à isométrie de H près ; même sans le développer on sait déjà qu'il y a 92 orbites de l'ensemble des coloriages.

Preuve du Théorème 12 :

D'après la Proposition 11, $W = \sum_{\text{types } \alpha} |\mathcal{O}_\alpha| X^\alpha$.

D'après le Théorème 6, on a donc $W = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sum_{\text{types } \alpha} |\mathcal{C}_\alpha^{<\sigma>}| X^\alpha$

d'où $W = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sum_{\text{types } \alpha} \sum_{f \in \mathcal{C}_\alpha^{<\sigma>}} W(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sum_{f \in \{1,\ldots,q\}^X, \sigma.f = f} W(f)$.

Soit $\sigma \in G$. Notons $X_1, \ldots, X_p$ les orbites de X sous l'action de $< \sigma >$ et $m_1, \ldots, m_p$ leur cardinal respectif.

Posons $\varphi : \begin{cases} \{f \in \{1, \ldots, q\}^X, \sigma.f = f\} & \to & \{1, \ldots, q\}^{\{1,\ldots,p\}} \\ f & \mapsto & (i \mapsto j \text{ tel que } f = j \text{ sur } X_i) \end{cases}$.

Remarquons que φ est bijective d'où $\sum_{f \in \{1,\ldots,q\}^X, \sigma.f = f} W(f) = \sum_{g \in \{1,\ldots,q\}^{\{1,\ldots,p\}}} W(\varphi^{-1}(g))$

d'où $\displaystyle\sum_{f\in\{1,\dots,q\}^X,\sigma.f=f} W(f) = \sum_{g\in\{1,\dots,q\}^{\{1,\dots,p\}}} \prod_{i=1}^{p} X_{g(i)}^{m_i} = \prod_{i=1}^{p}(X_1^{m_i}+\dots+X_q^{m_i})$.

En notant $e_i(\sigma)$ le nombre d'orbites de X sous l'action de $<\sigma>$ de cardinal i on a donc bien : $\displaystyle\sum_{f\in\{1,\dots,q\}^X,\sigma.f=f} W(f) = \prod_{i=1}^{|X|}(X_1^i+\dots+X_q^i)^{e_i(\sigma)}$, d'où :

$$W = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\prod_{i=1}^{|X|}(X_1^i+\dots+X_q^i)^{e_i(\sigma)}.$$